18/12/2019

• Νόμοι των Μεγάλων Αριθμών

Ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών (ΑΝΜΑ)

Εάν X_1, X_2 είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με $E(X_i) = \mu < +\infty$, $Var(X_i) = \sigma^2 < +\infty$, τότε

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \bar{X}_n \xrightarrow{\Pi} \mu.$$

<u>Απόδειξη</u>

$E(\bar{X}_n) = \mu.$, $Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$, $n \to +\infty$

Ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών (ΙΝΜΑ)

Ακριβώς τα ίδια με πάνω αλλά $\bar{X}_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} \mu.$

Ποια η διαφορά; (ΙΝΜΑ - ΑΝΜΑ)

Ο ασθενής νόμος λέει ότι για οποιαδήποτε μεγάλη τιμή του n πχ n^* ο μέσος όρος $\bar{X}_{n^*}$ είναι πιθανό να βρίσκεται κοντά στο μ.

Δε μας λέει όμως ότι θα παραμείνει κοντά στο μ $\forall\, n \geq n^*$
Αυτό μας το επιβεβαιώνει ο ισχυρός νόμος.

• Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Έστω $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με πεπερασμένη μέση τιμή και διακύμανση σ^2.
Τότε:

$$\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{k} N(0,1) \quad \text{ή} \quad \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{k} N(0,1)$$

Απόδειξη

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\sigma}{\sqrt{n}\,\sigma} = \frac{\sum^{n}(X_i - \mu)}{\sqrt{n}\,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right] \overset{Y_i = \frac{X_i-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

όπου Y_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ με:
$E(Y_i) = E\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$
και
$Var(Y_i) = 1.$

Αρκεί νδο $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{k} N(0,1)$

Αρκεί νδο $m_{1/\sqrt{n}\sum Y_i}(t) \xrightarrow{n\to\infty}$ Ροπογ/ρια της $N(0,1) \equiv e^{\frac{1}{2}t^2}$

$$m_{1/\sqrt{n}\sum Y_i}(t) := E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}\sum^{n} Y_i}\right) = E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}(Y_1+Y_2+\dots+Y_n)}\right) = E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_1}\right) E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_2}\right) \dots E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y_n}\right) =$$

$$= \left[E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}Y}\right)\right]^n = \left[m_Y(t/\sqrt{n})\right]^n$$

$m_Y(t) = E(e^{tY})$

Παρατηρώ ότι $m_Y(0) = E(e^{0Y}) = 1$

$m_Y'(t) = E(Ye^{tY})$

$m_Y'(0) = E(Y) = 0$

$m_Y''(t) = E(Y^2 e^{tY})$

$m_Y''(0) = E(Y^2) = Var(Y) + E(Y^2) = 1 + 0^2 = 1$

Σκοπός:

$$m_Y(t) \underset{\substack{\text{Taylor ως}\\ \text{προς } 0}}{\xrightarrow{\text{ανάπτυγμα}}} m_Y(0) + (t-0)m_Y'(0) + \frac{(t-0)^2}{2!} m_Y''(0) + \dots$$

άρα $m_Y(t) \simeq 1 + \frac{t^2}{2}$

Άρα έχουμε:

$$m_{1/\sqrt{n}\sum Y_i}(t) = \left[m_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[1 + \frac{t^2}{2n}\right]^n \longrightarrow e^{t^2/2}$$

Υπόδειξη:
$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Άρα δείξαμε ότι $\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{\kappa} N(0,1)$

ή ισοδύναμα $\frac{n\bar{X}_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{\kappa} N(0,1)$

ή $\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{\kappa} N(0,1)$

Κ.Ο.Θ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1) Για την προσέγγιση πιθανοτήτων π.χ. της μορφής

$$P\left(\alpha < \sum_{i=1}^n X_i < \beta\right) = P\left(\frac{\alpha - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} < \frac{\sum_{i}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} < \frac{\beta - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) \simeq \Phi\left(\frac{\beta - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$$

$\frac{\sum^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{\kappa} N(0,1)$ όπου Φ η α.σ.κ $N(0,1)$

Αν τα x_i είναι συνεχείς τ.μ. τότε τα παραπάνω συνεχίζουν να ισχύουν ακόμα και αν θέλω ανισοϊσότητες

Αν τα x_i είναι διακριτές τ.μ. δεν ισχύουν, διότι δεν "πιάνουμε" την ισότητα, οπότε σ' αυτή την περίπτωση κάνουμε τη λεγόμενη διόρθωση συνεχείας.

$$P\left(\alpha-\frac{1}{2} \le \sum^{n} x_i \le \beta+\frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{\alpha-n\mu-1/2}{\sqrt{n}\,\sigma} \le \frac{\sum^{n} x_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le \frac{\beta-n\mu+\frac{1}{2}}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{\beta-n\mu+1/2}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-n\mu-1/2}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$$

2) $X \sim B(n,p)$

<u>Ερώτημα:</u> Πως μπορώ να χρησιμοποιήσω το Κ.Ο.Θ για την προσέγγιση της X;

$X \overset{?}{=} \sum x_i$ με x_i ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με πεπερασμένο πλήθος.

Ναι μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ως εξής:

$X = \sum_{i=1}^{n} x_i$ με x_i τ.μ. να είναι 1 όταν έχω επιτυχία και 0 όταν έχω αποτυχία

δηλαδή $x_i = \begin{cases} 1, & \text{επιτυχία} \\ 0, & \text{αποτυχία} \end{cases}$ (με πιθανότητα επιτυχίας $= p$)

με $E(x_i) = 1 \cdot P(x_i=1) + 0 \cdot P(x_i=0) = 1 \cdot p = p$

$Var(x_i) = E(x_i^2) - [E(x_i)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$

$E(x_i^2) = 1^2 P(x_i=1) + 0\, P(x_i=0) = p$

Άρα τώρα μπορώ να εφαρμόσω Κ.Ο.Θ.:

$$X = \frac{\sum x_i - np}{\sqrt{n}\sqrt{pq}} \xrightarrow{k} N(0,1) \qquad (\text{ισχύει για } npq \geq 20)$$

Άσκηση 6.7 σελ 239

ΝΔΟ $E(m_k) = \mu_k$ $\qquad m_k = \frac{1}{n}\sum x_i^k$

$Var(m_k) = \frac{\mu_{2k} - \mu_k^2}{n}$ $\qquad \mu_k = E(x^k)$

ΛΥΣΗ

$$E(m_k) = E\left(\frac{1}{n}\sum x_i^k\right) = \frac{1}{n}\sum^{n} E(x_i^k) = \frac{1}{n}\sum^{n} \mu_k = \mu_k$$

$$Var(m_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(x_i^k)$$

Όμως $Var\, x^k = E(x^{2k}) - (E(x^k))^2 = \mu_{2k} - (\mu_k)^2$

Άσκηση 6.16 σελ 241

Z_1, Z_2 τ.δ. $N(0,1)$ $\qquad$ ανεξάρτητες

X_1, X_2 τ.δ. $N(1,1)$

i) $\bar{X} + \bar{Z}$

ii) $(Z_1 + Z_2)/\sqrt{[(X_2 - X_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2]/2}$

iii) $[(X_1 - X_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2]/2$

iv) $(X_2 + X_1 - 2)^2/(X_2 - X_1)^2$

ΛΥΣΗ

i) $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2} \sim N\left(1, \frac{1}{2}\right)$ $\qquad Var(\bar{X}) = \frac{1}{4}(Var(X_1) + Var(X_2)) = \frac{1}{2}$

$$\bar{Z} = \frac{Z_1 + Z_2}{2} \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\bar{X} + \bar{Z} \overset{\text{ανεξ.}}{\sim} N\left(1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = N(1,1)$$

Αν όμως δεν είχα ανεξαρτησία;

$$\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{z}\end{pmatrix} \sim N_2\left[\underbrace{\begin{pmatrix}\mu_{\bar{x}}\\ \mu_{\bar{z}}\end{pmatrix}}_{\mu}, \begin{pmatrix}\sigma^2_{\bar{x}} & \rho_{\bar{x},\bar{z}}\\ \rho_{\bar{z},\bar{x}} & \sigma^2_{\bar{z}}\end{pmatrix}\right] \quad \text{τότε}$$

$$A\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{z}\end{pmatrix} \sim N[A\mu, A\Sigma A^T] \quad \text{εδώ πια το } A = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

ii) $Z_1 + Z_2 \sim N(0,2)$, αφού $Z_1, Z_2 \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow \frac{Z_1+Z_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$$

$X_2 - X_1 \sim N(0,2)$, αφού $X_1, X_2 \sim N(1,1)$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{X_2-X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{(X_2-X_1)^2}{2} \sim N(0,1)^2 \equiv \chi^2_1 \\ &\frac{Z_2-Z_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{(Z_2-Z_1)^2}{2} \sim N(0,1)^2 \equiv \chi^2_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(X_2-X_1)^2 + (Z_2-Z_1)^2}{2} \sim \chi^2_2$$

Οπότε έχουμε:

$$\frac{Z_1+Z_2}{\sqrt{\frac{(X_2-X_1)^2+(Z_2-Z_1)^2}{2}}} = \frac{\frac{Z_1+Z_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{(X_2-X_1)^2+(Z_2-Z_1)^2}{2}\Big/\sqrt{2}}} \sim t_2$$

με την προϋπόθεση ότι Z_1+Z_2, Z_2-Z_1 ανεξάρτητες

Παρατήρηση:

$$\begin{pmatrix}Z_1+Z_2\\ Z_2-Z_1\end{pmatrix}_{2\times1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_{2\times2}\begin{pmatrix}Z_1\\ Z_2\end{pmatrix}_{2\times1} \quad \text{άρα}$$

$$\begin{pmatrix}Z_1+Z_2\\ Z_2-Z_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_1\\ Z_2\end{pmatrix} = A\cdot Z$$

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow AZ \sim N_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow AZ \sim N_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

$Z_1+Z_2,\ Z_2-Z_1$ ασυσχέτιστες από κανονική κατανομή $\Rightarrow$ ανεξάρτητες

iii) $\dfrac{(X_1-X_2)^2}{2} \sim \chi^2_1$, $\dfrac{(Z_1+Z_2)^2}{2} \sim \chi^2_1$, $\dfrac{(Z_1-Z_2)^2}{2} \sim \chi^2_1$

άρα $\dfrac{(X_1-X_2)^2+(Z_1+Z_2)^2+(Z_1-Z_2)^2}{2} \sim \chi^2_3$

αφού $(X_1-X_2), (Z_1-Z_2), (Z_1+Z_2)$ ανεξάρτητα

vi) $X_1+X_2 \sim N(2,2)$

$\Rightarrow \dfrac{X_1+X_2-2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1) \Rightarrow \dfrac{(X_1+X_2-2)^2}{2} \sim \chi^2_1$

$X_2-X_1 \sim N(0,2) \Rightarrow \dfrac{(X_2-X_1)^2}{2} \sim \chi^2_1$

άρα η τ.μ. $F = \dfrac{\chi^2_1}{\chi^2_1} \sim F_{1,1}$ υπό την προϋπόθεση ότι αριθμητής και παρονομαστής ανεξάρτητοι.

Άρα θα πρέπει να είναι ανεξ/τες η X_2+X_1 με την X_2-X_1

$$\begin{pmatrix} X_2+X_1 \\ X_2-X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \text{ με } \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Θα βγουν ασυσχέτιστες και ανεξάρτητες

$$\begin{pmatrix} X_2+X_1 \\ X_2-X_1\end{pmatrix} \sim N_2\left[\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right]$$

Άσκηση 6.10 Σελ 240

Αν το τ.δ. προέρχεται από κανονικό πληθυσμό. ΝΔΟ $Var(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

ΛΥΣΗ

Ισχύει $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Επομένως: $Var\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = Var(\chi^2_{n-1}) \Rightarrow \frac{(n-1)^2}{\sigma^4} Var(S^2) = 2(n-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow Var(S^2) = \frac{2\sigma^4}{(n-1)}$

Άσκηση 6.12 Σελ 240

$\bar{X}_1, \bar{X}_2$ μέσες τιμές από $N(\mu,\sigma^2)$. Να βρεθεί το n έτσι ώστε οι δύο δειγματικές μέσες τιμές να διαφέρουν περισσότερο από σ να είναι 0,01.

ΛΥΣΗ

$P(|\bar{X}_1-\bar{X}_2| > \sigma) = 0{,}01 \Rightarrow P(|\bar{X}_1-\bar{X}_2| \leq \sigma) = 0{,}99 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(-\sigma \leq \bar{X}_1-\bar{X}_2 \leq \sigma) = 0{,}99 \quad (1)$

$$\left.\begin{aligned} &\bar{X}_1 \sim N(\mu, \sigma^2/n) \\ &\bar{X}_2 \sim N(\mu, \sigma^2/n)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{X}_1-\bar{X}_2 \sim N(0, 2\sigma^2/n)$$

άρα $(1) \Rightarrow P\left(\frac{-\sigma}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}} \leq \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{2\sigma^2/n}} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}}\right) = 0{,}99$

$\Rightarrow 2\cdot P\left(0 \leq Z \leq \sqrt{\frac{n}{2}}\right) = 0{,}99$

$\Rightarrow P\left(0 \leq Z \leq \sqrt{\frac{n}{2}}\right) = 0{,}495$

άρα $\sqrt{\frac{n}{2}} = 2{,}57 \Rightarrow n=13$ (από τον πίνακα)

Άσκηση 6.13 Σελ 240

ΝΔΟ $E(\chi_v^2) = v$ $\quad Var(\chi_v^2) = 2v$, $\quad E(1/\chi_v^2) = \frac{1}{v-2}$, $v>2$

και $E((1/\chi_v^2)^2) = \frac{1}{(v-2)(v-4)}$, $v>4$

ΛΥΣΗ

$(Y=)\ \chi_v^2 \equiv Gamma\left(\frac{v}{2}, 2\right)$

(αν δεν είχα το πινακάκι θα έκανα:)

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} y \frac{y^{\frac{v}{2}-1} e^{-y/2}}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}\,dy = \frac{2^{\frac{v}{2}+1}\Gamma\left(\frac{v}{2}+1\right)}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} \cancel{\int_0^{+\infty} \frac{y^{\frac{v}{2}+1-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{v}{2}+1}\Gamma\left(\frac{v}{2}+1\right)}\,dy}^{\,1}$$

$$= \frac{2\frac{v}{2}\cancel{\Gamma\left(\frac{v}{2}+1-1\right)}}{\cancel{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}} = v$$

Αν είχα $E(Y^2) = \int_0^{+\infty} y^2 \frac{y^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma(v/2)}\,dy = \frac{2^{\frac{v}{2}+2}\Gamma\left(\frac{v}{2}+2\right)}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma(v/2)} \int_0^{+\infty} \frac{y^{\frac{v}{2}+2-1} e^{-y/2}}{2^{\frac{v}{2}+2}\Gamma\left(\frac{v}{2}+2\right)}\,dy =$

$= 4\frac{\left(\frac{v}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}+1\right)}{\Gamma(v/2)} = 2v\left(\frac{v}{2}+1\right)$

$$E\left(\frac{1}{\chi_v^2}\right) = E\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_0^{+\infty} y^{-1} \frac{y^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}\,dy \quad \frac{\frac{v}{2}-1>0}{v>2} \quad \frac{2^{\frac{v}{2}-1}\Gamma\left(\frac{v}{2}-1\right)}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{+\infty} \frac{y^{\frac{v}{2}-1-1} \cdot e^{-y/2}}{2^{\frac{v}{2}-1}\Gamma\left(\frac{v}{2}-1\right)}\,dy = \frac{1}{2} \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{v}{2}-1\right)}}{\left(\frac{v}{2}-1\right)\cancel{\Gamma\left(\frac{v}{2}-1\right)}} = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{2}-1\right)^{-1}$$

$$E\left(\frac{1}{Y^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{-2} y^{\frac{v}{2}-1} e^{-y/2}}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}\,dy = \ldots$$

Άσκηση 6,14 σελ 240

$t_\nu \quad \left(\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_\nu/\nu}} \right.$, με $N(0,1)$ και χ^2 ανεξ.$\left.\right)$

$E(t_\nu)=0$

ΛΥΣΗ

$$E\left(\frac{X}{\sqrt{Z/\nu}}\right) \overset{\substack{X\sim N(0,1)\\ Z\sim\chi^2_\nu}}{\underset{X,Z \text{ ανεξ}}{=}} E(X)\cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{Z/\nu}}\right)=0$$

$$Var(t_\nu)=E(t_\nu^2)-\left[E(t_\nu)\right]^2=E(t_\nu^2)$$

$$E(t_\nu^2)=E\left(\frac{X^2}{Z/\nu}\right)=\nu\,\cancelto{1}{E(X^2)}\,E\left(\frac{1}{Z}\right)$$